ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГИМНАЗИЯ №3 Г. ГРОДНО»

Секция «Алгебра, геометрия и математический анализ»

«Некоторые частные виды диофантовых уравнений»

Автор работы:

Екимова Мария Денисовна, 8 класс
ГУО «Гимназия №3 г. Гродно»,

Руководители работы:

Разумов Евгений Владимирович, учитель математики, магистр педагогических наук,
ГУО «Гимназия №3 г. Гродно»

г. Гродно, 2020 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Диофантовые уравнения и их решения и по сей день остаются актуальной темой. Умение решать такие уравнения позволяют найти остроумные и сравнительно простые решения казалось бы «неразрешимых» задач, овладеть новыми математическими навыками, рассмотреть некоторые методы решения неопределенных уравнений.

Самые разные задачи практического применения часто приводят к уравнениям, в которых неизвестные по своему смыслу могут принимать только целочисленные или натуральные значения. Уравнения в целых числах рассматривались еще в глубой древности.

Диофантовыми уравнениями называют алгебраические уравнения или системы алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, для которых необходимо найти целые или рациональные решения, содержащие не менее двух переменных. Мы часто встречаемся с линейными диофантовыми уравнениями с двумя переменными. Но что же делать, если уравнение не линейное или содержит более двух переменных? Диофантовые уравнения такого рода и будут рассмотрены в данной работе.

Объект исследования: теория чисел.

Предмет исследования: диофантовые уравнения.

Цель исследования – найти целые решения некоторых нестандартных иррациональных уравнения.

Задачи:

1) Решить уравнение
$$\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\left(x+y\sqrt{2}+z\sqrt{3}+d\sqrt{6}\right)=2020$$
в натуральных числах;
2) Решить уравнение $\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{y}=\sqrt[5]{2020^2}$ в натуральных числах;
3) Рассмотреть общий вид уравнения $\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{y}=\text{c},\ c\in\mathbb{R}$.

Все полученные результаты являются доказанными и могут быть применены в дальнейших исследованиях.

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ЧАСТЬ

Рассмотрим следующее уравнение в натуральных числах:

$$\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\left(x+y\sqrt{2}+z\sqrt{3}+d\sqrt{6}\right)=2020.$$

Для решения данного уравнения получена

Лемма 1.

Пусть $d_1, d_2 \notin N$, причем $\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \sqrt{d_1 d_2} \notin N$. Если $a+b\sqrt{d_1}+c\sqrt{d_2}+d\sqrt{d_1 d_2}=0$ $(a,b,c,d \in Q)$, то $a=b=c=d=0$.

Доказательство.

Так как $d_1 \in N$, $\sqrt{d_1} \notin N$, то $\sqrt{d_1} \notin Q$ (действительно, если $\sqrt{d_1}=\frac{m}{n}$, НОД$(m,n)=1$, где $m,n \in N$, то $m^2=d_1 n^2$; так как НОД$(m,n)=1$, то НОД$(m^2,n^2)=1$, причем m^2 делится на n^2 (поскольку $m^2=d_1 n^2$), следовательно, $n^2=1, n=1$, т.е. $\sqrt{d_1}=\frac{m}{n}=m \in N$ – противоречие). Аналогично $\sqrt{d_2}, \sqrt{d_1 d_2} \notin Q$.

Имеем

$a+b\sqrt{d_1}=-\sqrt{d_2}\left(c+d\sqrt{d_1}\right), \left(a+b\sqrt{d_1}\right)^2=d_2\left(c+d\sqrt{d_1}\right)^2, a^2+b^2 d_1-d_2\left(c^2+d^2 d_1\right)=-\sqrt{d_1}\left(2cdd_2-2ab\right)$,

следовательно, $2cdd_2-2ab=0$ (поскольку $\sqrt{d_1} \notin Q$), поэтому $a^2+b^2 d_1-d_2\left(c^2+d^2 d_1\right)=0$, значит $a^2+b^2 d_1-d_2\left(c^2+d^2 d_1\right)=-\sqrt{d_1}\left(2cdd_2-2ab\right)$, т.е. $\left(a-b\sqrt{d_1}\right)^2=d_2\left(c-d\sqrt{d_1}\right)^2, a-b\sqrt{d_1}=\pm\sqrt{d_2}\left(c-d\sqrt{d_1}\right)$.

Имеем

$2a=\left(a+b\sqrt{d_1}\right)+\left(a-b\sqrt{d_1}\right)=-\sqrt{d_2}\left(c+d\sqrt{d_1}\right)\pm\sqrt{d_2}\left(c-d\sqrt{d_1}\right)$, т.е. $2a=-2c\sqrt{d_2}$ или $2a=-2d\sqrt{d_1 d_2}$.

Если $2a=-2c\sqrt{d_2}$, то $c=0$ (ибо $\sqrt{d_2} \notin Q$), значит $a=-c\sqrt{d_2}=0, 0=a+b\sqrt{d_1}=-\sqrt{d_2}\left(c+d\sqrt{d_1}\right), c+d\sqrt{d_1}=0$, поэтому $c=d=0$ (ибо $\sqrt{d_1} \notin Q$), т.е. $a=b=c=d=0$.

Если $2a=-2d\sqrt{d_1 d_2}$, то $d=0$ (ибо $\sqrt{d_1 d_2} \notin Q$), значит $a=-d\sqrt{d_1 d_2}=0, b\sqrt{d_1}+c\sqrt{d_2}=-\left(a+d\sqrt{d_1 d_2}\right)=0, \left(b\sqrt{d_1}+c\sqrt{d_2}\right)\sqrt{d_1}=0, bd_1=-c\sqrt{d_1 d_2}$, значит с $=0$ (ибо $\sqrt{d_1 d_2} \notin Q$), $bd_1=-c\sqrt{d_1 d_2}=0, bd_1=0, b=0$,
то есть $a=b=c=d=0$.

Лемма 1 доказана.

Согласно условию, имеем $(x+2y+3z+6t-2020)+(x+y+3z+3t)\sqrt{2}+(x+2y+z+2t)\sqrt{3}+(x+y+z+t)\sqrt{6}=0$. Так как $\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{2\cdot 3} \notin N$, то, согласно лемме 1, имеем:

$x+2y+3z+6t-2020=0, x+y+3z+3t=0, x+2y+z+2t=0, x+y+z+t=0.$

Значит

$(x+y+3z+3t)-(x+y+z+t)=0, (x+2y+z+2t)-(x+y+z+t)=0,$

т.е. $z=-t, y=-t,$

значит $0=x+y+z+t=x-t-t+t=0,$ т. е. $x=t.$ Поэтому $t+2(-t)+3(-t)+6t-2020=0, t=1010, x=t=1010, y=z=-t=-1010.$

Ответ: {(1010, -1010, -1010, 1010)}.

Рассмотрим следующее уравнение в натуральных числах:

$$\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{y}=\sqrt[5]{2020^2}.$$

Выведена и доказана

Лемма 2. Если $a\in Q, \sqrt[5]{a}\notin Q$, то многочлен x^5-a неприводим над Q, т.е. не представим в виде произведения двух многочленов положительных степеней с рациональными коэффициентами.

Доказательство.

Пусть $f(x)=x^5-a$. Предположим $f(x)=f_1(x)f_2(x),$ где $f_1(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0, f_2(x)=b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0$ $(a_0,\dots,a_m,b_0,\dots,b_n\in Q;\ a_mb_n\neq 0; n\notin N)$, тогда, $f(x)=f_1(x)f_2(x)=(a_mb_n)x^{m+n}+\cdots$, следовательно, $a_mb_n=1, m+n=5.$

Можно считать, что $a_m=b_n=1$ (действительно, если $a_m\neq 1$ или $b_n\neq 1$, то $f(x)=f_1(x)f_2(x)=\left(a_m\left(x^m+\cdots+\frac{a_0}{a_m}\right)\right)\left(b_n\left(x^n+\cdots+\frac{b_0}{b_n}\right)\right)=\left(x^m+\cdots+\frac{a_0}{a_m}\right)\left(x^n+\cdots+\frac{b_0}{b_n}\right)$, значит вместо многочленов $f_1(x)$ и $f_2(x)$ мы рассмотрим многочлены $x^m+\cdots+\frac{a_0}{a_m}, x^n+\cdots+\frac{b_0}{b_n}$ со старшими коэффициентами, равными 1).

Пусть для определенности $m\leq n$, тогда $m=1, n=4$ или $m=2, n=3$ (поскольку $m+n=5$).

Если $m=1, n=4$, то $x^5-a(x+a_0)(x^4+b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0)$, значит $(-a_0)^5-a=0,$ т. е. $\sqrt[5]{a}=-a_0\in Q$ – противоречие.

Если $m=2, n=3$,

$x^5-a=(x^2+a_1x+a_0)(x^3+b_2x^2+b_1x+b_0)=x^5+(a_1+b_2)x^4+(a_0+a_1b_2+b_1)x^3+(a_0b_2+a_1b_1+b_0)x^2+(a_0b_1+a_1b_0)x+a_0b_0,$

значит

$a_1+b_2=0, a_0+a_1b_2+b_1=0, a_0b_2+a_1b_1+b_0=0, a_0b_1+a_1b_0=0, a_0b_0=-a.$

Поэтому $b_2=-a_1,\ b_1=-a_1b_2-a_0=a_1^2-a_0, b_0=-a_1b_1-a_0b_2=a_1^3+2a_1a_0.$

И так как $a_1b_0+a_0b_1=0,$ то $a_1(-a_1^3+2a_1a_0)+a_0(a_1^2-a_0)=0, a_1^4-3a_1^2a_0+a_0=0, \left(a_1^2-\frac{3}{2}a_0\right)^2=5\left(\frac{a_0}{2}\right)^2, a_1^2-\frac{3}{2}a_0=\pm\sqrt{5}\cdot\frac{a_0}{2},$

значит $a_0 = 0$ (ибо $\sqrt{5} \notin Q$), следовательно,
$a = -a_0 b_0 = 0, \sqrt[5]{a} = 0 \in Q$ – противоречие. Что и требовалось доказать.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. $a, b, \sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b} \in Q$ $(a, b > 0)$, то $\sqrt[5]{a}, \sqrt[5]{b} \in Q$.

Доказательство.

Пусть $\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b} = c$ $(c \in Q)$, тогда $b = \left(c - \sqrt[5]{a}\right)^5$, т.е. $\left(\sqrt[5]{a} - c\right)^5 + b = 0$.

Пусть $f(x) = x^5 - a, g(x) = (x-c)^5 + b$, тогда $\sqrt[5]{a}$ является корнем многочленов $f(x)$ и $g(x)$, т.е. $f\left(\sqrt[5]{a}\right) = 0, g\left(\sqrt[5]{a}\right) = 0$. Пусть $d(x) =$ НОД$\left(f(x), g(x)\right)$. Предположим $\sqrt[5]{a} \notin Q$. Так как $d(x)$ делит $f(x) = x^5 - a$, то, согласно лемме 1, $d(x) = 1$ или $f(x)$.

Рассмотрим случай, когда $d(x) = 1$. Тогда существуют многочлены $u(x), v(x)$, такие, что $f(x)u(x) + g(x)\,v(x) = d(x)$. Значит $f\left(\sqrt[5]{a}\right)u\left(\sqrt[5]{a}\right) + g\left(\sqrt[5]{a}\right)v\left(\sqrt[5]{a}\right) = 1, 0 \cdot u\left(\sqrt[5]{a}\right) + 0 \cdot v\left(\sqrt[5]{a}\right) = 1, 0 = 1$ – противоречие.

Рассмотрим случай, когда $d(x) = f(x)$. Так как $d(x)$ делит $g(x)$, то $f(x)$ делит $g(x)$. И так как степени многочленов $f(x)$ и $g(x)$ равны, коэффициенты при старших степенях у многочленов $f(x)$ и $g(x)$ равны, то
$f(x) = g(x), x^5 - a = (x-c)^5 + b, x^5 - 5x^4c + 10x^3c^2 - 10x^2c^3 + 5xc^4 - c^5 + b$.
Приравнивая соответствующие коэффициенты, получаем $c = 0, -a = -c^5 + b$, значит $a = -b$, что невозможно, поскольку $a, b > 0$.Итак $\sqrt[5]{a} \in Q$. Аналогично $\sqrt[5]{b} \in Q$.

Лемма 3 доказана.

Так как $\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y} = \sqrt[5]{2020^2}$,то $\sqrt[5]{2020^3x} + \sqrt[5]{2020^3y} = 2020$.

Пусть $2020^3x = a, 2020^3y = b$ $(a, b \in N)$.

Так как $a, b, \sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b} \in N$,то $a, b, \sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b} \in Q$ $(a, b, > 0)$, значит согласно **лемме 3**, $\sqrt[5]{a}, \sqrt[5]{b} \in Q$. И так как $a, b \in N$, то $\sqrt[5]{a}, \sqrt[5]{b} \in N$,
т.е. $\sqrt[5]{a} = c, \sqrt[5]{b} = d$ $(c, d \in N)$. Имеем $2020^3x = c^5, 2020^3y = d^5$,
т.е. $2^6 5^3 101^3 x = c^5, 2^6 5^3 101^3 y = d^5$, причем 101 является простым числом, значит c, d делятся на $2^2 \cdot 5 \cdot 101$,
т.е. $c = 2^2 \cdot 5 \cdot 101m, d = 2^2 \cdot 5 \cdot 101n$ $(m, n \in N)$,
поэтому $x = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 101^2 m^5, y = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 101^2 n^5$,
$\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y} = (m+n)\sqrt[5]{2^4 \cdot 5^2 \cdot 101^2}$.
Учитывая $\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y} = \sqrt[5]{2020^2} = \sqrt[5]{2^4 \cdot 5^2 \cdot 101^2}$, имеем $m + n = 1$, а так как m, n – натуральные числа, то решений нет.

Ответ: нет корней.

Отметим, что если бы в разложении числа, стоящего в правой части уравнения, был делитель в третьей степени (например, $2008 = 2^3 \cdot 251, 1928 =$

$2^3 \cdot 241,\ 1971 = 3^3 \cdot 73$), то уравнение имело натуральные решения. Приведем пример такого уравнения.

$$\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y} = \sqrt[5]{2008^2}.$$

Аналогично решению, изложенному ранее, имеем:

$\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y} = \sqrt[5]{2008^2}$, то $\sqrt[5]{2008^3 x} + \sqrt[5]{2008^3 y} = 2008$.

Пусть $2008^3 x = a, 2008^3 y = b\ (a, b \in N)$.

Так как $a, b, \sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b} \in N$, то $a, b, \sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b} \in Q\ (a, b, > 0)$, значит согласно **лемме 3**, $\sqrt[5]{a}, \sqrt[5]{b} \in Q$. И так как $a, b \in N$, то $\sqrt[5]{a}, \sqrt[5]{b} \in N$, т.е. $\sqrt[5]{a} = c, \sqrt[5]{b} = d\ (c, d \in N)$.

Имеем $2008^3 x = c^5, 2008^3 y = d^5$, т.е. $2^9 251^3 x = c^5, 2^9 251^3 y = d^5$, причем 251 является простым числом, значит c, d делятся на $2^2 \cdot 251$,

т. е. $\mathrm{c} = 2^2 \cdot 251m, d = 2^2 \cdot 251n\ (m, n \in N)$,

поэтому $x = 2 \cdot 251^2 m^5, y = 2 \cdot 251^2 n^5, \sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y} = (m+n)\sqrt[5]{2 \cdot 251^2}$.

Учитывая $\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y} = \sqrt[5]{2008^2} = 2\sqrt[5]{2 \cdot 251^2}$, имеем $m + n = 2\ (m, n \in N)$, значит $m = n = 1, x = y = 2 \cdot 251^2 = 126002$.

Ответ: $\{(126002; 126002)\}$.

Замечание. **Лемма 2** является частным случаем более общего утверждения: если p – простое число, $a \in Q, \sqrt[p]{a} \notin Q$, то многочлен $x^p - a$ неприводим над Q. Отметим также, что если p не является простым числом, то многочлен $x^p - a$, вообще говоря, не является неприводимым над Q.

Например, $x^4 - 4 = (x^2 - 2)(x^2 + 2)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выведены и доказаны леммы, позволяющие решать некоторые виды диофантовых уравнений:

Лемма 1. Пусть $d_1, d_2 \notin N$, причем $\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \sqrt{d_1 d_2} \notin N$. Если $a + b\sqrt{d_1} + c\sqrt{d_2} + d\sqrt{d_1 d_2} = 0$ $(a, b, c, d \in Q)$, то $a = b = c = d = 0$.

Лемма 2. Если $a \in Q, \sqrt[5]{a} \notin Q$, то многочлен $x^5 - a$ неприводим над Q, т.е. не представим в виде произведения двух многочленов положительных степеней с рациональными коэффициентами.

Лемма 3. $a, b, \sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b} \in Q$ $(a, b > 0)$, то $\sqrt[5]{a}, \sqrt[5]{b} \in Q$.

Получен алгоритм решения в натуральных числах уравнения $\sqrt[5]{x^2} + \sqrt[5]{y^2} = c$, $c \in \mathbb{N}$.

В дальнейшем планируем рассмотреть уравнения вида $\sqrt{x_1} + \cdots + \sqrt{x_2} = c$, $c \in \mathbb{R}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Кноп, К. А. Азы теории чисел / К. А. Кноп. – М.:МЦНМО, 2017. – 80 с.
2. Шахмейстер, А. Х. Доказательства неравенств. Математическая индукция. Теория сравнений. Введение в криптографию / А. Х. Шахмейстер – СПб.: «Петроглиф» : «Виктория плюс» : М.: Издательство МЦНМО, 2018. – 396 с.