ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
"СРЕДНЯЯ ШКОЛА № 23 Г. ГРОДНО"

Секция «Алгебра, геометрия и математический анализ»

ТЕОРЕМА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ В АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ

Сербул Максим Артемьевич, 11 «П» класс

Лещук Сергей Станиславович, учитель,
ГУО «Средняя школа №23 г. Гродно»,

г. Гродно, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Работа посвящена вопросу распределения простых чисел в прогрессиях и обобщению формулы Сельберга. К задачам о простых числах обращались многие математики, так как эта тема находит широкое приложение при решении многих практических задач. Пусть $0<l<D$, $(D,l)=1$, $\pi(l,D,x)=\sum\limits_{\substack{p\le x \\ p\equiv l(\operatorname{mod} D)}} 1$ – количество простых чисел в арифметической прогрессии с начальным членом l и шагом D , меньших либо равных x . Теорема о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях, гласящая, что:

$$\pi(l,D,x)\sim\frac{x}{\varphi(D)\ln x},$$

где $\varphi(D)=\sum\limits_{\substack{n\le D \\ (n,D)=1}} 1$ – функция Эйлера, впервые была доказана в 1896 году Валле-Пуссеном с использованием функций комплексной переменной. Доказательство, не использующее комплексный анализ, было найдено лишь в 1950 году Атле Сельбергом [1], [2]. Однако, для обоснования более сильной оценки, например

$$\pi(l,D,x)=\frac{1}{\varphi(D)}li(x)+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right),$$

где $li(x)=\int\limits_2^x\frac{dt}{\ln t}$, доказательство Сельберга сильно усложняется.

Целью работы является рассмотрение оценок, необходимых для доказательства усиленной теоремы о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях по методу А. Сельберга.

В работе используются следующие обозначения:

f, g – арифметические функции;

$\varphi(D)$ – функция Эйлера;

1 – арифметическая функция, тождественно равная единице;

$\Lambda(n)$ – функция Мангольдта;

$$\mu(n)=\begin{cases} +1, n=1, \\ (-1)^r, n=p_1\ldots p_r, \\ 0, p^2\mid n \end{cases}$$ – функция Мёбиуса;

$\chi(n)$ – характер Дирихле;

$f*g$ – свёртка Дирихле: $(f*g)(n)=\sum\limits_{d\mid n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$.

Для достижения поставленной цели, необходимо решить следующие задачи:

1. Доказать ряд лемм, необходимых для доказательства усиленной теоремы о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях по методу А. Сельберга.

2. Доказать следующую

основную теорему:

$$\pi(l,D,x)=\frac{1}{\varphi(D)}\int_2^x\frac{dt}{\ln t}+O\left(\frac{x}{\ln^{\alpha+1}x}\right),$$

для любого $\alpha<\frac{3}{2}$.

В работе сформулированы ряд лемм и представлено доказательство теоремы.

Основная часть

Для доказательства сформулированной основной теоремы был доказан ряд лемм, приведем их формулировки и доказательства.

Определение. Функцией порядка h будем называть функцию вида $f = \underbrace{\mu * \ldots * \mu}_{h} * W\left(1, \ln, \ln^2, \ldots\right)$, где W – некоторый полином от нескольких переменных.

В дальнейшем χ всегда будет означать неглавный характер, если только не оговаривается обратное.

Лемма 1. Пусть функция f имеет порядок h. Тогда

$$\sum_{n \le x} \chi(n) f(n) = O\left(x \ln^{h-1} x\right).$$

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по h, с помощью обобщённого метода гиперболы Дирихле, подробно описанного в статье [3].

Лемма 2. Пусть $k_1 \ge 3$, $k_2 \ge 3$ и $k = k_1 + k_2$. Тогда функция

$$\Lambda \ln^{k-1} + \frac{(k-1)!}{(k_1-1)!(k_2-1)!} \Lambda \ln^{k_1-1} * \Lambda \ln^{k_2-1}$$

имеет порядок $\le k-3$.

Доказательство. Лемма доказана в статье [4].

Лемма 3. Пусть $k_1 \ge 3$, $k_2 \ge 3$ и $k = k_1 + k_2$. Тогда

$$\sum_{n \le x} \chi(n) \Lambda(n) \ln^{k-1} n +$$

$$+ \frac{(k-1)!}{(k_1-1)!(k_2-1)!} \sum_{n_1 n_2 \le x} \chi(n_1) \Lambda(n_1) \ln^{k_1-1} n_1 \chi(n_2) \Lambda(n_2) \ln^{k_2-1} n_2 = O\left(x \ln^{k-4} x\right).$$

Доказательство. Лемма следует из леммы 1 и леммы 2.

Лемма 4. Пусть $k_1 \ge 3$, $k_2 \ge 3$ и $k = k_1 + k_2$. Тогда

$$\sum_{n \le x} \Lambda(n) \ln^{k-1} n + \frac{(k-1)!}{(k_1-1)!(k_2-1)!} \sum_{n_1 n_2 \le x} \Lambda(n_1) \ln^{k_1-1} n_1 \Lambda(n_2) \ln^{k_2-1} n_2 =$$

$$= 2 \sum_{n \le x} \ln^{k-1} n + O\left(x \ln^{k-4} x\right).$$

Доказательство. Лемма доказана в статье [4].

Положим теперь

$$\psi(\chi, x) = \sum_{n \le x} \chi(n) \Lambda(n),$$

$$\psi_k(\chi, x) = \sum_{n \le x} \chi(n) \Lambda(n) \ln^k n.$$

Лемма 5. Пусть $k_1 \ge 3$, $k_2 \ge 5$ и $k = k_1 + k_2$. Тогда

$$\left|\psi_{k-1}(\chi, x)\right| \le \frac{(k-1)!}{(k_1-1)!(k_2-1)!} \int_1^x \left|\psi_{k_1-1}\left(\chi, \frac{x}{\tau}\right)\right| \ln^{k_2-1} \tau \, d\tau + O\left(x \ln^{k-4} x\right).$$

Доказательство. Лемма доказывается аналогично теореме 2 из статьи [4].

Пусть для произвольного $\alpha < \frac{3}{2}$

$$A(\chi,x)=\max_{1\le t\le x}\left|\frac{\psi(\chi,t)}{t}\ln^{\alpha} t\right|.$$

Лемма 6. Для любого $x\ge 1$ имеем

$$\left|\int_1^x \psi_5(\chi,t)\frac{dt}{t}\right| \le Cx\ln^5 x\left(\frac{A(\chi,x)}{\ln^{\alpha} x}\right)^2,$$

где C – некоторая абсолютная константа.

Доказательство. Несложно видеть, что

$$\int_1^x \psi_5(\chi,t)\frac{dt}{t}+30\int_1^x \psi_2\left(\chi,\frac{x}{t}\right)\psi_2(\chi,t)\frac{dt}{t}=\int_1^x \sum_{n\le t}\chi(n) f(n)\frac{dt}{t}, \tag{1}$$

где $f=\Lambda\ln^5+30\Lambda\ln^2*\Lambda\ln^2$. А поскольку по лемме 3 $\sum_{n\le t} f(n)=O\left(t\ln^2 t\right)$, то из равенства (1) получаем, что

$$\left|\int_1^x \psi_5(\chi,t)\frac{dt}{t}\right| \le 30\int_1^x \left|\psi_2\left(\chi,\frac{x}{t}\right)\right|\left|\psi_2(\chi,t)\right|\frac{dt}{t}+O\left(x\ln^2 x\right). \tag{2}$$

Так как $\psi_2(\chi,x)=\psi(\chi,x)\ln^2 x-2\int_1^x \psi(\chi,t)\ln t\frac{dt}{t}$ и $\alpha<\frac{3}{2}$, то получаем

$$\psi_2(\chi,x)=O\left(x\ln^2 x\frac{A(\chi,x)}{\ln^{\alpha} x}\right).$$

Отсюда получаем, что

$$\int_1^x \left|\psi_2\left(\chi,\frac{x}{t}\right)\right|\left|\psi_2(\chi,t)\right|\frac{dt}{t}=O\left(x\ln^5 x\left(\frac{A(\chi,x)}{\ln^{\alpha} x}\right)^2\right).$$

Подставляя последнее равенство в (2), получаем утверждение леммы.

Лемма 7. Для любых $x\ge 1$ верно неравенство

$$\int_1^x \psi(\chi,t)\frac{dt}{t}=O\left(x\frac{A^2(\chi,x)}{\ln^{2\alpha} x}\right).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\int_1^x \psi_k(\chi,t)\frac{dt}{t}=\sum_{n\le x}\chi(n)\Lambda(n)\left(\ln x-\ln\frac{x}{n}\right)^k\ln\frac{x}{n}=$$

$$=\ln^k x\int_1^x \psi(\chi,t)\frac{dt}{t}+\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i\ln^{k-i} x\sum_{n\le x}\chi(n)\Lambda(n)\ln^{k+1}\frac{x}{n}. \tag{3}$$

Для упрощения записи доказательства теоремы положим

$$V(\chi,x)=\max_{1\le t\le x}\left|\frac{1}{t}\left(\frac{\ln^{\alpha} t}{A(\chi,t)}\right)^2\int_1^t \psi(\chi,\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right|.$$

Теперь оценим $\sum\limits_{n\le x}\chi(n)\Lambda(n)\ln^{k+1}\dfrac{x}{n}$. С помощью (4) получаем

$$\sum_{n\le x}\chi(n)\Lambda(n)\ln^{k+1}\frac{x}{n}\ln^{k}{}_{\Lambda-1}(x)=(k+1)k\int\limits_1^x\left(\int\limits_1^t\psi(\chi,\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right)\ln^{k-1}\frac{x}{t}\frac{dt}{t}=$$

$$=O\left(V(\chi,x)\int\limits_{\sqrt{x}}^{x}\frac{tA^2(\chi,t)}{\ln^{2\alpha}t}\ln^{k-1}\frac{x}{t}\frac{dt}{t}+\int\limits_1^{\sqrt{x}}\ln^{k-1}\frac{x}{t}dt\right)=$$

$$=O\left(xV(\chi,x)\frac{A^2(\chi,x)}{\ln^{2\alpha}x}\int\limits_1^{\sqrt{x}}\ln^{k-1}\kappa\frac{d\kappa}{\kappa^2}+\sqrt{x}\ln^{k-1}x\right)=O\left(xV(\chi,x)\frac{A^2(\chi,x)}{\ln^{2\alpha}x}\right).$$

Подставляя это выражение в (3) получаем

$$\int\limits_1^x\psi_k(\chi,t)\frac{dt}{t}=\ln^k x\int\limits_1^x\psi(\chi,t)\frac{dt}{t}+O\left(xV(\chi,x)\ln^{k-1}x\frac{A^2(\chi,x)}{\ln^{2\alpha}x}\right).$$

Используя последнее равенство при $k=5$ и лемму 6, получаем, что

$$\ln^5 x\int\limits_1^x\psi(\chi,t)\frac{dt}{t}=O\left(x\ln^5 x\frac{A^2(\chi,x)}{\ln^{2\alpha}x}+xV(\chi,x)\ln^{k-1}x\frac{A^2(\chi,x)}{\ln^{2\alpha}x}\right),$$

откуда следует, что при достаточно больших x верно неравенство

$$\left|\frac{1}{x}\left(\frac{\ln^\alpha x}{A(\chi,x)}\right)^2\int\limits_1^x\psi(\chi,t)\frac{dt}{t}\right|<C+\frac{1}{2}V(\chi,x).$$

Из последнего неравенства и определения $V(\chi,x)$ немедленно следует, что

$$V(\chi,x)=O(1),$$

откуда следует утверждение леммы.

Лемма 8. Пусть $\sqrt{x}\le x_1\le x$. Тогда верно неравенство

$$\left|\int\limits_{x_1}^x\frac{\psi(\chi,t)}{t^2}dt\right|\le K\frac{A^2(\chi,x)}{\ln^{2\alpha}x},$$

где K – некоторая абсолютная константа.

Доказательство. Пусть $L(\chi)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\chi(n)}{n}$, $L_1(\chi)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\chi(n)\ln n}{n}$. Эти ряды сходятся, а также $L(\chi)\ne 0$ [5]. Несложно видеть, что

$$\sum_{n\le x}\frac{\chi(n)}{n}=L(\chi)+O\left(\frac{1}{x}\right),\ \sum_{n\le x}\frac{\chi(n)\ln n}{n}=L_1(\chi)+O\left(\frac{\ln x}{x}\right). \qquad (4)$$

Используя мультипликативнос χ, получаем:

$$\sum_{n\le x}\frac{\chi(n)\ln n}{n}=\sum_{n\le x}\frac{\chi(n)}{n}\sum_{d|n}\Lambda(d)=\sum_{e\le x}\frac{\chi(e)}{e}\sum_{d\le\frac{x}{e}}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d}=$$

$$=\sum_{e\le x}\frac{\chi(e)}{e}\left(\frac{e}{x}\psi\left(\chi,\frac{x}{e}\right)+\int_1^{\frac{x}{e}}\psi(\chi,t)\frac{dt}{t^2}\right)=\frac{1}{x}\sum_{n\le x}\chi(n)\ln n+\sum_{e\le x}\frac{\chi(e)}{e}\int_1^{\frac{x}{e}}\psi(\chi,t)\frac{dt}{t^2},$$

что с учётом (4) даёт:

$$L_1(\chi)+O\left(\frac{\ln x}{x}\right)=\frac{1}{x}\sum_{n\le x}\chi(n)\ln n+\sum_{e\le x}\frac{\chi(e)}{e}\int_1^{\frac{x}{e}}\psi(\chi,t)\frac{dt}{t^2}. \tag{5}$$

Учитывая теперь, что

$$\int_1^x\frac{\psi(\chi,t)}{t^2}dt=\frac{1}{x}\sum_{n\le x}\chi(n)\Lambda(n)\ln\frac{x}{n}+\int_1^x\frac{dt}{t^2}\int_1^t\psi(\chi,\tau)\frac{d\tau}{\tau}, \tag{6}$$

имеем:

$$\sum_{e\le x}\frac{\chi(e)}{e}\int_1^{\frac{x}{e}}\psi(\chi,t)\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{x}\sum_{e\le x}\chi(e)\sum_{d\le\frac{x}{e}}\chi(d)\Lambda(d)\ln\frac{x}{ed}+$$

$$+\sum_{e\le x}\frac{\chi(e)}{e}\int_1^{\frac{x}{e}}\frac{dt}{t^2}\int_1^t\psi(\chi,\tau)\frac{d\tau}{\tau}=\frac{1}{x}\sum_{n\le x}\chi(n)\ln n\ln\frac{x}{n}+\int_1^x\sum_{e\le\frac{x}{t}}\frac{\chi(e)}{e}\frac{dt}{t^2}\int_1^t\psi(\chi,\tau)\frac{d\tau}{\tau}.$$

Используя теперь (4) и лемму 7, получаем, что

$$\int_1^x\sum_{e\le\frac{x}{t}}\frac{\chi(e)}{e}\frac{dt}{t^2}\int_1^t\psi(\chi,\tau)\frac{d\tau}{\tau}=\int_1^x\left(L(\chi)+O\left(\frac{t}{x}\right)\right)\frac{dt}{t^2}\int_1^t\psi(\chi,\tau)\frac{d\tau}{\tau}=$$

$$=\int_1^x\left(L(\chi)+O\left(\frac{t}{x}\right)\right)\frac{dt}{t^2}\int_1^t\psi(\chi,\tau)\frac{d\tau}{\tau}=L(\chi)\int_1^x\frac{dt}{t^2}\int_1^t\psi(\chi,\tau)\frac{d\tau}{\tau}+$$

$$+O\left(\frac{A^2(\chi,x)}{x}\int_1^x\frac{dt}{\ln^{2\alpha}t}\right)=L(\chi)\int_1^x\frac{dt}{t^2}\int_1^t\psi(\chi,\tau)\frac{d\tau}{\tau}+O\left(\frac{A^2(\chi,x)}{\ln^{2\alpha}x}\right).$$

Учитывая теперь, что $\sum_{n\le x}\chi(n)\ln n=O(\ln x)$, $\sum_{n\le x}\chi(n)\Lambda(n)\ln\frac{x}{n}=O\left(\ln^2 x\right)$, и $L(\chi)\ne 0$, получаем из (5):

$$\int_1^x\frac{dt}{t^2}\int_1^t\psi(\chi,\tau)\frac{d\tau}{\tau}=\frac{L_1(\chi)}{L(\chi)}+O\left(\frac{A^2(\chi,x)}{\ln^{2\alpha}x}\right).$$

Подставляя последнее выражение для $\int_1^x\frac{dt}{t^2}\int_1^t\psi(\chi,\tau)\frac{d\tau}{\tau}$ в (6), с использованием леммы 7 получаем, что

$$\int_1^x\frac{\psi(\chi,t)}{t^2}dt=\frac{L_1(\chi)}{L(\chi)}+O\left(\frac{A^2(\chi,x)}{\ln^{2\alpha}x}\right),$$

откуда немедленно следует утверждение леммы.

Определим теперь $\delta(x)$ следующим образом:

$$\delta(x)=8K\frac{A(\chi,x)}{\ln^{\alpha}x}.$$

Лемма 9. Для достаточно больших x на интервале $\left[xe^{-\delta(x)};x\right]$ существует точка y_0 такая, что

$$\left|\frac{\psi(\chi,y_0)}{y_0}\right|\le\frac{1}{8}\frac{A(\chi,x)}{\ln^{\alpha}x}.$$

Доказательство. Лемма легко следует из леммы 8.

Лемма 10. Для достаточно больших x на интервале $\left[xe^{-\delta(x)};x\right]$ существует подынтервал $\left[y_1;y_1e^{\frac{\delta(x)}{128K}}\right]$ такой, что

$$\left|\frac{\psi(\chi,t)}{t}\right|\le\frac{1}{2}\frac{A(\chi,x)}{\ln^{\alpha}x},$$

где t принадлежит этому подынтервалу.

Доказательство. Пусть $f=\Lambda\ln^5+30\Lambda\ln^2*\Lambda\ln^2$. Тогда из леммы 4 получаем, что

$$f=2\ln^5+r,$$
$$\sum_{n\le x}r(n)=O\left(x\ln^2 x\right).$$

Применяя преобразование Абеля, получаем

$$\sum_{2\le n\le x}\frac{r(n)}{\ln^5 n}=\frac{1}{\ln^5 x}\sum_{2\le n\le x}r(n)+5\int_2^x\sum_{2\le n\le t}r(n)\frac{dt}{t\ln^6 t}=O\left(\frac{x}{\ln^3 x}+\int_2^x\frac{dt}{\ln^4 t}\right)=O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right).$$

Отсюда следует

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)+30\sum_{2\le n\le x}\frac{\left(\Lambda\ln^2*\Lambda\ln^2\right)(n)}{\ln^5 n}=2\sum_{n\le x}1+O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right),$$

что даёт для любых x_1 и x_2 , $x_1\le x_2$

$$\psi(x_2)-\psi(x_1)\le 2(x_2-x_1)+O\left(\frac{x_2}{\ln^3 x_2}\right).$$

Из последнего равенства и того, что $\left|\chi(n)\right|\le 1$ получаем

$$\left|\psi(\chi,x_2)-\psi(\chi,x_1)\right|\le 2\left|x_2-x_1\right|+O\left(\frac{x_2}{\ln^3 x_2}\right).$$

По лемме 9 для достаточно больших x на интервале $\left[xe^{-\delta(x)};x\right]$ существует точка y_0 такая, что

$$\left|\frac{\psi(\chi, y_0)}{y_0}\right| \le \frac{1}{8}\frac{A(\chi, x)}{\ln^\alpha x}.$$

Теперь если $y_0 e^{-\frac{\delta}{128K}} \le y \le y_0 e^{\frac{\delta}{128K}}$, то из (12) имеем

$$|\psi(\chi, y)| \le |\psi(\chi, y_0)| + 2|y - y_0| + O\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right),$$

откуда

$$\left|\frac{\psi(\chi, y)}{y}\right| \le \frac{y_0}{y}\left|\frac{\psi(\chi, y_0)}{y_0}\right| + 2\left|1 - \frac{y_0}{y}\right| + O\left(\frac{x}{y\ln^3 x}\right).$$

Из последнего неравенства получаем

$$\left|\frac{\psi(\chi, y)}{y}\right| \le e^{\frac{\delta}{128K}}\left|\frac{\psi(\chi, y_0)}{y_0}\right| + 2\left(e^{\frac{\delta}{128K}} - 1\right) + O\left(\frac{1}{\ln^3 x}\right).$$

Учитывая теперь, что $\left|\frac{\psi(\chi, y_0)}{y_0}\right| \le \frac{1}{8}\frac{A(\chi, x)}{\ln^\alpha x}$ и $e^{\frac{\delta}{128K}} - 1 < \frac{\delta}{128K} e^{\frac{\delta}{128K}}$, а так же что $\delta \le 16K$, получаем

$$\left|\frac{\psi(\chi, y)}{y}\right| \le e^{\frac{\delta}{128K}}\frac{1}{8}\frac{A(\chi, x)}{\ln^\alpha x} + \frac{\delta}{64K}e^{\frac{\delta}{128K}} + O\left(\frac{1}{\ln^3 x}\right) < \frac{e^{\frac{1}{8}}}{8}\frac{A(\chi, x)}{\ln^\alpha x} + \frac{\delta e^{\frac{1}{8}}}{64K} = \frac{1}{2}\frac{A(\chi, x)}{\ln^\alpha x}.$$

Таким образом, лемма доказана.

Лемма 11. Пусть $k - 1 > \alpha$. Тогда для достаточно больших x верно неравенство

$$\int_{xe^{-\delta(x)}}^{x}\left|\frac{\psi(\chi, t)}{t}\right|\ln^{k-1} t\frac{dt}{t} \le A(\chi, x)\left(1 - \frac{1}{512K}\right)\int_{xe^{-\delta(x)}}^{x}\ln^{k-\alpha-1} t\frac{dt}{t}.$$

Доказательство. Используя лемму 10, получаем

$$\int_{xe^{-\delta(x)}}^{x}\left|\frac{R(t)}{t}\right|\ln^{k-1} t\frac{dt}{t} = \int_{xe^{-\delta(x)}}^{y_1}\left|\frac{R(t)}{t}\right|\ln^{k-1} t\frac{dt}{t} + \int_{y_1}^{y_1 e^{\frac{\delta(x)}{128K}}}\left|\frac{R(t)}{t}\right|\ln^{k-1} t\frac{dt}{t} + \int_{y_1 e^{\frac{\delta(x)}{128K}}}^{x}\left|\frac{R(t)}{t}\right|\ln^{k-1} t\frac{dt}{t} \le$$

$$\le \frac{A(x)}{\ln^\alpha x}\ln^{k-1} x\left(\int_{xe^{-\delta(x)}}^{y_1}\frac{dt}{t} + \int_{y_1 e^{\frac{\delta(x)}{128K}}}^{x}\frac{dt}{t}\right) + \frac{1}{2}\frac{A(x)}{\ln^\alpha x}\ln^{k-1} x\int_{y_1 e^{\frac{\delta(x)}{128K}}}^{x}\frac{dt}{t} = \left(1 - \frac{1}{256K}\right)\delta(x)\frac{A(x)}{\ln^\alpha x}\ln^{k-1} x$$

.

Если теперь x достаточно велик, то

$$\left(1 - \frac{1}{256K}\right)\delta(x)\frac{A(x)}{\ln^\alpha x}\ln^{k-1} x \le A(x)\left(1 - \frac{1}{512K}\right)\ln^{k-\alpha-1}\left(xe^{-\delta(x)}\right)\int_{xe^{-\delta(x)}}^{x}\frac{dt}{t} \le$$

$$\le A(x)\left(1 - \frac{1}{512K}\right)\int_{xe^{-\delta(x)}}^{x}\ln^{k-\alpha-1} t\frac{dt}{t}.$$

Таким образом, лемма доказана.

Доказательство основной теоремы. Пусть теперь $k_1 \geq 4$. Тогда из леммы 11 легко следует, что

$$\int_1^x \left|\frac{\psi(\chi,t)}{t}\right| \ln^{k_1-1} t \frac{dt}{t} \leq A(\chi,x)\left(1-\frac{1}{1024K}\right)\int_1^x \ln^{k_1-\alpha-1} t \frac{dt}{t},$$

откуда

$$\int_1^x \left|\frac{\psi(\chi,t)}{t}\right| \ln^{k_1-1} t \ln^{k_2-1}\frac{x}{t}\frac{dt}{t} \leq A(\chi,x)\left(1-\frac{1}{1024K}\right)\int_1^x \ln^{k_1-\alpha-1} t \ln^{k_2-1}\frac{x}{t}\frac{dt}{t}. \qquad (7)$$

С помощью преобразования Абеля получаем

$$\left|\psi_{k-1}(\chi,x)\right| = \left|\psi(\chi,x)\ln^{k-1} x-(k-1)\int_1^x \psi(\chi,t)\ln^{k-2} t\frac{dt}{t}\right| =$$

$$= \left|\psi(\chi,x)\right|\ln^{k-1} x + O\left(xA(\chi,x)\ln^{k-\alpha-2} x\right). \qquad (8)$$

Из последнего равенства следует, что

$$\int_1^x \left|\psi_{k_1-1}\left(\chi,\frac{x}{\tau}\right)\right|\ln^{k_2-1}\tau d\tau = \int_1^x \left|\psi\left(\chi,\frac{x}{\tau}\right)\right|\ln^{k_1-1}\frac{x}{\tau}\ln^{k_2-1}\tau d\tau + O\left(xA(\chi,x)\ln^{k-\alpha-2} x\right) =$$

$$= x\int_1^x \left|\frac{\psi(\chi,t)}{t}\right|\ln^{k_1-1} t\ln^{k_2-1}\frac{x}{t}\frac{dt}{t} + O\left(xA(\chi,x)\ln^{k-\alpha-2} x\right),$$

где $t = \dfrac{x}{\tau}$, откуда, учитывая лемму 5 и (8) получаем

$$\left|\psi(\chi,x)\right|\ln^{k-1} x \leq x\frac{(k-1)!}{(k_1-1)!(k_2-1)!}\int_1^x \left|\frac{\psi(\chi,t)}{t}\right|\ln^{k_1-1} t\ln^{k_2-1}\frac{x}{t}\frac{dt}{t} +$$

$$+O\left(xA(\chi,x)\ln^{k-\alpha-2} x\right). \qquad (9)$$

Учитывая неравенство (7), получаем из (9)

$$\left|\psi(\chi,x)\right|\ln^{k-1} x \leq x\frac{(k-1)!}{(k_1-1)!(k_2-1)!}A(\chi,x)\left(1-\frac{1}{1024K}\right)\int_1^x \ln^{k_1-\alpha-1} t\ln^{k_2-1}\frac{x}{t}\frac{dt}{t} +$$

$$+O\left(xA(\chi,x)\ln^{k-\alpha-2} x\right),$$

другими словами,

$$\left|\frac{\psi(\chi,x)}{x}\right| \leq \left(1-\frac{1}{1024K}\right)\frac{A(\chi,x)}{\ln^{\alpha} x}\frac{(k-1)!}{(k_1-1)!(k_2-1)!}\mathrm{B}(k_1-\alpha,k_2) + O\left(\frac{A(\chi,x)}{\ln^{\alpha} x}\ln^{-1} x\right).$$

Но учитывая, что

$$\lim_{k_1\to\infty}\frac{(k-1)!}{(k_1-1)!(k_2-1)!}\mathrm{B}(k_1-\alpha,k_2) = 1,$$

получаем, что при достаточно больших k_1 и x верно неравенство

$$\left|\frac{\psi(\chi,x)}{x}\right| \leq \left(1-\frac{1}{2048K}\right)\frac{A(\chi,x)}{\ln^{\alpha} x},$$

откуда, вспоминая определение $A(\chi,x)$, получаем, наконец

$$\left|\frac{\psi(\chi,x)}{x}\ln^{\alpha}x\right| < \max_{1\le t\le x}\left|\frac{\psi(\chi,t)}{t}\ln^{\alpha}t\right|.$$

Отсюда немедленно следует, что

$$\frac{\psi(\chi,x)}{x}\ln^{\alpha}x = O(1),$$

другими словами,

$$\psi(\chi,x) = O\left(\frac{x}{\ln^{\alpha}x}\right), \qquad (10)$$

для любого $\alpha < \frac{3}{2}$ и неглавного характера χ. Для главного характера по модулю D имеем:

$$\psi(\chi_0,x) = \psi(x) - \sum_{p|D}\left[\frac{\ln x}{\ln p}\right]\ln p = \psi(x) + O(\ln x) = x + O\left(\frac{x}{\ln^{\alpha}x}\right),$$

любого $\alpha < \frac{3}{2}$, где мы использовали оценку

$$\psi(x) = x + O\left(\frac{x}{\ln^{\alpha}x}\right), \qquad (11)$$

$\alpha < \frac{3}{2}$, доказанную нами в прошлой работе (см [3], [4]).

Пусть теперь $0 < l < D$, $(D,l) = 1$. Используя известные свойства характеров [6] и оценки (10) и (11), получаем

$$\psi(l,D,x) = \sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l \pmod D}}\Lambda(n) = \frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi}\sum_{n\le x}\chi(n)\Lambda(n) = \frac{x}{\varphi(D)} + O\left(\frac{x}{\ln^{\alpha}x}\right).$$

Отсюда, с помощью преобразования Абеля, следует, что

$$\pi(l,D,x) = \sum_{\substack{p\le x\\ p\equiv l \pmod D}} 1 = \sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l \pmod D}}\frac{\Lambda(n)}{\ln n} + O\left(\sqrt{x}\right) =$$

$$= \frac{\psi(l,D,x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\psi(l,D,t)\,dt}{t\ln^2 t} + O\left(\sqrt{x}\right) = \frac{x}{\varphi(D)\ln x} + \int_2^x \frac{dt}{\varphi(D)\ln^2 t} + O\left(\frac{x}{\ln^{1+\alpha}x}\right) =$$

$$= \frac{1}{\varphi(D)}\int_2^x \frac{dt}{\ln t} + O\left(\frac{x}{\ln^{1+\alpha}x}\right),$$

для любого $\alpha < \frac{3}{2}$. Таким образом, основная теорема доказана.

Заключение

Работа посвящена решению задачи о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях методами теории функций вещественной переменной. В работе рассмотрены свойства свёртки Дирихле, которая, за счёт своей связи с мультипликативной структурой натуральных чисел оказывается одним из ключевых инструментов доказательства теоремы о распределении простых.

В работе использованы свертка Дирихле, функции Чебышёва и доказаны:

- ряд лемм, необходимых для доказательства усиленной теоремы о распределении простых чисел в арифметической прогрессии методом А. Сельберга;
- усиленная теорема о распределение простых чисел в прогрессиях:

$$\pi(l,D,x)=\frac{1}{\varphi(D)}\int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t}+O\left(\frac{x}{\ln^{1+\alpha} x}\right),$$

для любого $\alpha < \frac{3}{2}$.

Перспективой для дальнейшего научного исследования по этой теме является дальнейшее упрощение доказательства и усиление теоремы о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях. Полученные результаты могут найти приложение в развитии теории простых чисел, а также при решении других задач данной области.

Список используемых источников

1. A. Selberg, An elementary proof of the prime number theorem for arithmetic progressions, Canad. J. Math., 1950, V. 2, P. 66—78.
2. A. Selberg, An elementary proof of the prime number theorem, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 50, No. 2 (Apr., 1949), 305-313
3. Сербул, М.А., Вувуникян Ю.М. Свертка Дирихле и ее применение в аналитической теории чисел. Весн. Гродз. дзярж. ун-та. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2019. – № 3. – С. 6–15.
4. Сербул, М.А., Вувуникян Ю.М. Асимптотические оценки обобщённых функций Чебышёва. Весн. Гродз. дзярж. ун-та. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2020. – № 1. – С. 6–15.
5. А.О. Гельфонд, Ю.В. Линник, Элементарные методы в аналитической теории чисел, М.: Физматгиз, 1962, 272 с.
6. Э. Трост, Простые числа, М.: Физматгиз, 1959, 135 с.