Государственное учреждение образования
«Гимназия №10 г. Гродно»

Секция «алгебра, геометрия и математический анализ»

Увлекательные суммы

Автор работы:

Сытая Дарья Дмитриевна,
8 «Б» класс
ГУО «Гимназия №10 г. Гродно»

Руководители работы:

Кулеш Елена Евгеньевна, доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики ГрГУ им. Я.Купалы, кандидат физ.-мат. наук, доцент

Ермакова Анна Николаевна, учитель математики ГУО «Гимназия №10 г.Гродно»

Гродно, 2020

Содержание

Введение..3
Основная часть 5
Заключение..19
Список использованных источников 20

Введение

Каждый день жизнь ставит перед нами множество задач: больших и маленьких, интересных и непростых, затееватых логических проблем, а также сложных рутинных задач, требующих от школьника концентрации внимания, усидчивости. Умение анализировать, выделять главное, обобщать, выдвигать гипотезу, проверять ее, разрабатывать стратегию – важные цели, достичь которые и помогают сложные олимпиадные задачи. Задачи на нахождение бесконечных или конечных сумм слагаемых определенного вида достатоно часто встречаются на различных математических олимпиадах. Более того, они всегда интересны и увлекательны.

Таким образом, научиться решать такие задачи, является весьма важной и актуальной задачей, чем и обусловлен выбор темы исследования.

В данной работе решена задача, предложенная на VII-м Минском городском открытым турнире юных математиков – младшая лига (5-7 классы).

Постановка задачи:

Везде в этой задаче значения параметров a, b, c, n – целые числа.

1. Найдите все такие целые x (в зависимости от n), что выполняется равенство

$$x+(x+1)+\ldots+(x+n-1)+(x+n)=(x+n+1)+(x+n+2)+\ldots+(x+2n).$$

2. Найдите все такие целые x (в зависимости от a, b, c), что при $a<b\le c$

$$x+(x+1)+\ldots+(x+a-1)+(x+a)=(x+b)+(x+b+1)+\ldots+(x+c).$$

При каких a, b, c целых решений не существует?

3. Найдите все такие целые x (в зависимости от n), что

$$x^2+(x+1)^2+\ldots+(x+n-1)^2+(x+n)^2=(x+n+1)^2+(x+n+2)^2+\ldots+(x+2n)^2.$$

Существует ли целое решение для любого натурального n?

4. Найдите все такие целые x (в зависимости от a, b, c), что при $a<b\le c$

$$x^2+(x+1)^2+\ldots+(x+a-1)^2+(x+a)^2=(x+b)^2+(x+b+1)^2\ldots+(x+c)^2.$$

При каких a, b, c целых решений не существует?

5. Давайте попробуем объединить уравнения 1 и 3 и будем чередовать степени. Найдите все такие целые x (в зависимости от n), что

а) $x+(x+1)^2+\ldots+(x+n-1)+(x+n)^2=(x+n+1)+(x+n+2)^2+\ldots+(x+2n-1)^2+(x+2n)$

при нечетном n.

б) $x+(x+1)^2+\ldots+(x+n-1)^2+(x+n)=(x+n+1)^2+(x+n+2)+\ldots+(x+2n-1)^2+(x+2n)$

при четном n.

в) Для каких натуральных n существует целое решение?

6. А теперь давайте попробуем объединить уравнения 2 и 4 и будем чередовать степени. Найдите все такие целые x (в зависимости от a, b, с), при $a<b\le c$, что

а) а – четное, разность (c-b) – нечетная:

$$x+(x+1)^2+\ldots+(x+a-1)^2+(x+a)=(x+b)+\ldots+(x+c)^2$$

б) а – четное, разность (c-b) – четная:

$$x+(x+1)^2+\ldots+(x+a-1)^2+(x+a)=(x+b)+\ldots+(x+c-1)^2+(x+c)$$

в) а – нечетное, разность (c-b) – нечетная:

$$x+(x+1)^2+\ldots+(x+a-1)+(x+a)^2=(x+b)+\ldots+(x+c)^2$$

г) а – нечетное, разность (c-b) – четная:

$$x+(x+1)^2+\ldots+(x+a-1)+(x+a)^2=(x+b)+\ldots+(x+c-1)^2+(x+c)$$

При каких a, b, c целых решений не существует?

7. Известно, что $1^3+2^3+\ldots+n^3=x^2$. При каких натуральных n окажется, что x – целое. Найдите x. (Выразите через n).

8. Существует ли n (если существует, то попробуйте найти все), что найдутся целые x, такие что

$$x^3+(x+1)^3+\ldots+(x+n-1)^3+(x+n)^3=(x+n+1)^3+\ldots+(x+2n)^3$$

9. Найдите все такие целые x (в зависимости от a, b, c), что

$$x^3+(x+1)^3+\ldots+(x+a-1)^3+(x+a)^3=(x+b)^3+\ldots+(x+c)^3$$

при $a<b\le c$. При каких a, b, c целых решений не существует?

Объект исследования: уравнения, числовые суммы, выражения.

Предмет исследования: свойства сумм чисел определенного вида.

Цель работы: научиться сворачивать суммы определенного вида, содержащие n слагаемых, решать полученные уравнения, анализировать полученные выражения, чтобы установить набор исходных параметров при которых решение будет целым.

В работе применяются следующие **методы:** математической индукции, преобразование выражений с помощью формул сокращенного умножения, анализ четности и нечетности и др.

Основная часть

Приведём вначале несколько формул, которые понадобятся для решения задачи.

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=A(n)$$

Получим с её помощью несколько новых формул.

Лемма 1.

$$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)=B(n)$$

Доказательство.

$$2+4+6+\cdots+2n=2(1+2+3+\cdots+n)=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)$$

Доказано.

Лемма 2.

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2=C(n)$$

Доказательство.

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=1+2+3+\cdots+2n-(2+4+6+\cdots+2n)=$$
$$=A(2n)-B(n)=\frac{2n(2n+1)}{2}-n(n+1)=2n^2+n-n^2-n=$$
$$=n^2.$$

Доказано.

Известна формула

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=D(n)$$

Доказательство.

Докажем ее методом математической индукции.

Пусть n=1.

л.ч.= 1^2=1; пр.ч.=$\frac{1}{6}\cdot 1\cdot(1+1)(2\cdot 1+1)=1$. Верно.

Пусть формула верна при $n=k$. Докажем что она верна при $n=k+1$.

$$\text{л.ч.}=1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2=$$
$$=\frac{1}{6}(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)$$

$$\text{пр. ч.} = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2(k+1)+1) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) =$$
$$= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)$$

Левая часть равна правой части. Значит при $n = k + 1$ формула верна.

Таким образом, формула $D(n)$ верна при всех натуральных n.

Доказано.

Лемма 3.

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) = E(n)$$

Доказательство.

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 = 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1).$$

Доказано.

Лемма 4.

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1) = \frac{1}{3}(4n^3 - n) = F(n)$$

Доказательство.

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 =$$
$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (2n)^2 - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2) =$$
$$= D(2n) - E(n) = \frac{1}{6}2n(2n+1)(4n+1) - \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) =$$
$$= \frac{1}{3}(4n^3 - n).$$

Доказано.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = G(n)$$

Докажем ее методом математической индукции.

Пусть n=1.

л.ч.= 1^3=1; пр.ч.= $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$. Верно.

Пусть формула верна при $n = k$. Докажем что она верна при $n = k + 1$.

$$\text{л.ч.} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 =$$
$$= \frac{(k+1)^2}{4}\left(k^2 + 4(k+1)\right) = \frac{(k+1)^2}{4}(k^2 + 4k + 4)) =$$
$$= \frac{(\mathrm{k}+1)^2(\mathrm{k}+2)^2}{4}.$$

$$\text{пр. ч.} = \frac{(\mathrm{k}+1)^2(\mathrm{k}+2)^2}{4}$$

Левая часть равна правой части. Значит при $n = k+1$ формула верна.

Таким образом, формула $G(n)$ верна при всех натуральных n.

Доказано.

Лемма 5.

$$x + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+n) = x(n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) = H(x,n)$$

Доказательство.

$$x + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+n) = x(n+1) + (1 + 2 + \dots + n) =$$
$$= x(n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$$

Доказано.

Лемма 6.

$$x + (x+2) + (x+4) + \dots + (x+2n) = x(n+1) + n(n+1) = K(x,n)$$

Лемма 7.

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + \dots + (x+n)^2 =$$
$$= x^2(n+1) + xn(n+1) + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = L(x,n)$$

Доказательство.

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + \dots + (x+n)^2 =$$
$$= x^2 + (x^2 + 2x + 1^2) + (x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2) + \dots + (x^2 + 2nx + n^2)$$
$$= x^2(n+1) + 2x(1 + 2 + \dots + n) + (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) =$$
$$= x^2(n+1) + 2x \cdot A(n) + D(n) =$$
$$= x^2(n+1) + xn(n+1) + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Доказано.

Лемма 8.

$$(x+1)^2+(x+3)^2+\cdots+(x+2n-1)^2=x^2n+2xn^2+\frac{1}{3}(4n^3-n)=$$
$$=M(x,n)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}(x+1)^2&+(x+3)^2+\cdots+(x+2n-1)^2=\\&=(x^2+2x+1^2)+(x^2+2\cdot 3x+3^2)+\cdots\\&+(x^2+2(2n-1)x+(2n-1)^2)=\\&=x^2n+2x(1+3+\cdots+2n-1)+(1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2)=\\&=x^2n+2x\cdot C(n)+F(n)=x^2n+2xn^2+\frac{1}{3}(4n^3-n).\end{aligned}$$

Доказано.

Пункт 1. Найдите все такие целые x (в зависимости от n), что выполняется равенство

$$\begin{aligned}x+(x+1)+\cdots+(x+n-1)+(x+n)&=\\&=(x+n+1)+(x+n+2)+\cdots+(x+2n)\end{aligned}$$

л.ч. =

$$x+(x+1)+\cdots+(x+n-1)+(x+n)=H(x,n)=x(n+1)+\tfrac{1}{2}n(n+1)$$

пр.ч. =

$$\begin{aligned}(x+n+1)&+(x+n+2)+\cdots+(x+2n)=\\&=(x+n+1)+\big((x+n+1)+1\big)+\cdots+\big((x+n+1)+n-1\big)=\\&=H(x+n+1,n-1)=\\&=(x+n+1)(n-1+1)+\frac{1}{2}(n-1)(n-1+1)=\\&=(x+n+1)n+\frac{1}{2}(n-1)n=xn+n\left(n+1+\frac{1}{2}(n-1)\right)=\\&=xn+\frac{n}{2}(3n+1)\end{aligned}$$

л.ч. = пр.ч.

$$x(n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)=xn+\frac{n}{2}(3n+1)$$
$$x=n^2$$

Таким образом, равенство выполняется при всех $x=n^2$.

Приведем примеры. Пусть $n = 3, x = 9$.

9+10+11+12=13+14+15

42=42

Пусть $n = 5, x = 25$.

25+26+27+28+29+30=31+32+33+34+35

165=165.

Пункт 2.

a, b, c, n – целые числа, $a < b \leq c$.

По смыслу задачи a, b, c – неотрицательные.

Заметим, что если b=a+1, c=2a, то получим предыдущий случай:

$$x + (x+1) + \cdots + (x+a-1) + (x+a) =$$
$$= (x+b) + (x+b+1) + \cdots + (x+c)$$

л.ч. $= H(x, a) = x(a+1) + \frac{1}{2}a(a+1)$;

пр.ч. $= H(x+b, c-b) = (x+b)(c-b+1) + \frac{1}{2}(c-b)(c-b+1)$;

л.ч. = пр.ч.

$$x(a+1) + \frac{1}{2}a(a+1) = (x+b)(c-b+1) + \frac{1}{2}(c-b)(c-b+1);$$

$$x(a+b-c) = b(c-b+1) + \frac{1}{2}(c-b)(c-b+1) - \frac{1}{2}a(a+1);$$

$$x(a+b-c) = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 + a - b - c);$$

При $c = a + b$ последнее уравнение примет вид

$$0 = b(a+1).$$

При $b = 0$ получим $c = a$, что противоречит условию. При $a = -1$ исходное уравнение не имеет смысла. Значит, при $c = a + b$ исходное уравнение <u>не имеет решений</u>.

Пусть $c \neq a + b$. Тогда

$$x = \frac{(c+b)(c-b+1) - a(a+1)}{2(a+b-c)} = \frac{-a^2 - b^2 + c^2 - a + b + c}{2(a+b-c)};$$

Так как $(a+b+c+1)(a+b-c) = (a+b)^2 - c(a+b) + c(a+b) - c^2 +$ $+a+b-c = a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + a + b - c$, то x можно представить в виде

$$x = -\frac{a+b+c+1}{2} + \frac{(a+1)b}{a+b-c}.$$

Пусть, например, $c = a+b-1$. Тогда $x = -a - b + ab + b = a(b-1)$ – целое.

Пусть, например, $c = a+b-2$. Тогда $x = -a + \frac{(a-1)b+1}{2}$ – целое только если a четное и b нечётные.

Пусть, например, $c = a+b+h$. Тогда $x = -a - b - \frac{h+1}{2} - \frac{(a+1)b}{h}$ – целое только если h нечетное и является делителем $a+1$ и b.

Пункт 3.

$$x^2 + (x+1)^2 + \cdots + (x+n-1)^2 + (x+n)^2 =$$
$$= (x+n+1)^2 + (x+n+2)^2 + \cdots + (x+2n)^2$$

л.ч.= $L(x,n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + x^2(n+1) + xn(n+1)$

пр.ч.= $(x+n+1)^2 + ((x+n+1)+1)^2 + \cdots + \left((x+n+1)+(n-1)\right)^2 =$ $L(x+n+1, n-1) = (x+n+1)^2 n + (x+n+1)(n-1)n + \frac{1}{6}n(n-1) +$ $+n(2(n-1)+1) = x^2 n + 2xn(n+1) + (n+1)^2 n + xn(n-1) + +n(n^2-1) +$ $\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) = x^2 n + x(3n^2+n) + \frac{1}{6}(14n^3 + 9n^2 + n)$

л.ч.=пр.ч.

$$x^2(n+1) + xn(n+1) + \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) =$$
$$= x^2 n + x(3n^2+n) + \frac{1}{6}(14n^3 + 9n^2 + n);$$

$$x^2 - 2xn^2 - 2n^3 - n^2 = 0;$$
$$x^2 - n^2 - 2n^2(x+n) = 0;$$
$$(x-n)(x+n) - 2n^2(x+n) = 0;$$
$$(x+n)(x - 2n^2 - n) = 0;$$
$$x = -n \quad \text{или} \quad x = 2n^2 + n.$$

Оба эти значения целые при всех натуральных n.

Пункт 4.

$$x^2+(x+1)^2+\cdots+(x+a-1)^2+(x+a)^2=$$
$$=(x+b)^2+(x+b-1)^2+\cdots+(x+c)^2$$

Заметим, что если b=a+1, c=2a, то получим предыдущий случай.

л.ч.= $L(x,a)=x^2(a+1)+xa(a+1)+\frac{1}{6}a(a+1)(2a+1)$

пр.ч.=$L(x+b,c-b)=(x+b)^2(c-b+1)+(x+b)(c-b)(c-b+1)+$
$+\frac{1}{6}(c-b)(c-b+1)(2c-2b+1)$

л.ч. = пр.ч.

Раскрыв скобки и перенеся всё в левую часть, получим:

$$6(a+b-c)x^2+6(a^2+b^2-c^2+a-b-c)x+2a^3+3a^2+a+2b^3-3b^2$$
$$+b-2c^3-3c^2-c=0$$

Если решить последнее уравнение относительно x, то корни в общем виде не будут целые.

Найдём некоторые частные решения:

Пусть $c=a+b$.

$$-2b(a+1)x=b(a+1)(a+b)$$

a,b,c – неотрицательные по смыслу задачи. Поэтому вариант $a=-1$ не рассматриваем. При $b=0$ получаем $c=a$ – противоречит условию $a<b\le c$. Таким образом, получаем $x=-\frac{a+b}{2}=-\frac{c}{2}$. Значит, если $c=a+b$ – чётное, то x – целое.

Пункт 5а.

n – нечётное.

$$x+(x+1)^2+\cdots+(x+n-1)+(x+n)^2$$
$$=(x+n+1)+(x+n+2)^2+\cdots+(x+2n-1)^2+(x+2n)$$

л.ч.= $x+(x+2)+(x+4)+\cdots+(x+n-1)+(x+1)^2+(x+3)^2+\cdots+$
$(x+n)^2=K\left(x,\frac{n-1}{2}\right)+M\left(x,\frac{n+1}{2}\right)=x\left(\frac{n-1}{2}+1\right)+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}+x^2\frac{n+1}{2}+$
$+x\frac{(n+1)^2}{2}+\frac{1}{3}\left(4\cdot\frac{(n+1)^3}{8}-\frac{n+1}{2}\right)=x^2\frac{n+1}{2}+x\frac{(n+1)^2+n+1}{2}+\frac{1}{6}((n+1)^3-n-$
$-1)+\frac{n^2-1}{4}=x^2\frac{n+1}{2}+x\frac{n^2+3n+2}{2}+\frac{1}{12}(2n^3+9n^2+4n-3);$

пр.ч.$= (x+n+1)+(x+n+3)+\dots+(x+2n)+(x+n+2)^2++(x+n+4)^2+\dots+(x+2n-1)^2 = K\left(x+n+1,\frac{n-1}{2}\right)+M\left(x+n++1,\frac{n-1}{2}\right) = (x+n+1)\frac{n+1}{2}+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}+(x+n+1)^2\frac{n-1}{2}+(x+n++1)\frac{(n-1)^2}{2}+\frac{1}{3}\left(4\cdot\frac{(n-1)^3}{8}-\frac{n-1}{2}\right) = x^2\frac{n-1}{2}+x\frac{3n^2-n}{2}+\frac{1}{12}(14n^3+3n^2+4n+3)$

Приравнивая левую часть к правой части, получим:

$$x^2+(-n^2+2n+1)x-n^3+\frac{n^2}{2}-\frac{1}{2}=0;$$

$D=(-n^2+2n+1)^2-4\left(-n^3+\frac{n^2}{2}-\frac{1}{2}\right)=n^4+4n+3$ –не полный квадрат.

Значит, нет целых решений ни при каких n.

Пункт 5б.

n – чётное.

$$x+(x+1)^2+\dots+(x+n-1)^2+(x+n)= \\ =(x+n+1)^2+(x+n+2)+\dots+(x+2n-1)^2+(x+2n).$$

л.ч.$= x+(x+2)+(x+4)+\dots+(x+n)+(x+1)^2+(x+3)^2+\dots+ +(x+n-1)^2 = K\left(x,\frac{n}{2}\right)+M\left(x,\frac{n}{2}\right) = x\left(\frac{n}{2}+1\right)+\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)+x^2\frac{n}{2}+x\frac{n^2}{2}+ +\frac{1}{3}\left(4\cdot\frac{n^3}{8}-\frac{n}{2}\right) = x^2\frac{n}{2}+x\frac{n^2+n+2}{2}+\frac{1}{6}(n^3-n)+\frac{n^2+2n}{4} = x^2\frac{n}{2}+x\frac{n^2+n+2}{2}+ +\frac{1}{12}(2n^3+3n^2+4n)$;

пр.ч.$= (x+n+2)+(x+n+4)+\dots+(x+2n)+(x+n+1)^2++(x+n+3)^2+\dots+(x+2n-1)^2 = K\left(x+n+2,\frac{n-2}{2}\right)+M\left(x+n,\frac{n}{2}\right) = (x+n+2)\frac{n}{2}+\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n}{2}+(x+n)^2\frac{n}{2}+(x+n)\frac{n^2}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{n^3}{2}-\frac{n}{2}\right) = x^2\frac{n}{2}++x\frac{3n^2+n}{2}+\frac{n(n+2)}{2}+\frac{n(n-2)}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^3}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{n^3}{2}-\frac{n}{2}\right) = x^2\frac{n}{2}+x\frac{3n^2+n}{2}+\frac{1}{12}(14n^3++9n^2+4n)$;

Приравнивая левую часть к правой и упрощая, получим:

$$x(n^2-1)+n^3+\frac{n^2}{2}=0;$$

При $n=1$ последнее уравнение примет вид $\frac{3}{2}=0$ и не имеет решений. При $n\neq 1$

$$x=\frac{n^2(2n+1)}{2(1-n)(1+n)}=-n-\frac{n(n+2)}{2(n^2-1)}$$

Так как n – чётное, то после сокращения на 2 числитель $n(n+2)$ – останется чётным, а знаменатель (n^2-1) – нечётным. Значит, дробь $\frac{n(n+2)}{2(n^2-1)}$ не является целой ни при каких натуральных чётных n.

Пункт 6a.

$$x+(x+1)^2+\cdots+(x+a-1)^2+(x+a)=(x+b)+\cdots+(x+c)^2$$

л.ч.= $x+(x+2)+(x+4)+\cdots+(x+a)+(x+1)^2+(x+3)^2+\cdots+(x+a-1)^2=K\left(x,\frac{a}{2}\right)+M\left(x,\frac{a}{2}\right)=x\left(\frac{a}{2}+1\right)+\frac{a}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}+1\right)+x^2\frac{a}{2}+x\frac{a^2}{2}+$
$+\frac{1}{6}(a^3-a)=x^2\frac{a}{2}+x\frac{a^2+a+2}{2}+\frac{1}{12}(2a^3+3a^2+4a);$

пр.ч.= $(x+b)+(x+b+2)+\cdots+(x+c-1)+(x+b+1)^2+(x+b+$ $+3)^2+\cdots+(x+c)^2=K\left(x+b,\frac{c-b-1}{2}\right)+M\left(x+b,\frac{c-b+1}{2}\right)=(x++b)\left(\frac{c-b+1}{2}+1\right)+\frac{c-b-1}{2}\cdot\left(\frac{c-b-1}{2}+1\right)+(x+b)^2\frac{c-b+1}{2}+2(x+b)\frac{(c-b+1)^2}{2}++\frac{1}{3}\left(4\cdot\frac{(c-b+1)^3}{8}-\frac{c-b+1}{2}\right)=x^2\frac{c-b+1}{2}+x\frac{c^2-b^2+3c-b+2}{2}+\frac{c^3-b^3}{6}+\frac{3c^2-b^2}{4}+\frac{2b+c}{3}--\frac{1}{4}$

л.ч.=пр.ч. Умножим обе части на 2, упростим:

$$x^2(a+b-c-1)+x(a^2+b^2-c^2+a+b-3c)+\frac{a^3+b^3-c^3}{3}$$
$$+\frac{a^2+b^2+3c^2}{2}+\frac{2a-4b-2c}{3}+\frac{1}{2}=0$$

Найдём некоторые частные решения.

Пусть $c=a+b-1$, тогда $x(1-ab)=\frac{1}{2}(ab^2+a^2b+ab-2a)$. $ab\neq 1$, т.к. $a<b$ по условию

$$x=\frac{a}{2}\left(\frac{b^2+ab+b-2}{1-ab}\right)=\frac{a}{2}\left(-1+\frac{b^2+b-1}{1-ab}\right)$$

Подберём *a, b,* чтобы *x* было целым.

a	2	4	4	6	6	8	8	…	2k	2k
b	0	0	3	0	5	0	7		0	2k-1
c	1	3	6	5	10	7	14		2k-1	4k-2
x	-2	-4	-4	-6	-6	-8	-8		-2k	-2k

Правда, эти решения не удовлетворяют условиям $a<b<c$, но всё равно интересны.

Пусть a=6, b=5, c=10, x=-6.

-6+(-5)^2+(-4)+(-3)^2+(-2)+(-1)^2+0=(-1)+0^2+1+2^2+3+4^2; 23=23

Пусть a=6, b=0, c=5, x=-6.

-6+(-5)^2+(-4)+(-3)^2+(-2)+(-1)^2+0=(-6)+(-5)^2+(-4)+(-3)^2+(-2)+(-1); 23=23

Пункт 6б.

a – чётное, c-b – чётное

$$x+(x+1)^2+\cdots+(x+a-1)^2+(x+a)= \\ =(x+b)+\cdots+(x+c-1)^2+(x+c)$$

л.ч.= $x+(x+2)+\cdots+(x+a)+(x+1)^2+(x+3)^2+\cdots+(x+a-1)^2 == K\left(x,\frac{a}{2}\right)+M\left(x,\frac{a}{2}\right)=x^2\frac{a}{2}+x\frac{a^2+a+2}{2}+\frac{1}{12}(2a^3+3a^2+4a)$

пр.ч.=$(x+b)+(x+b+2)+\cdots+(x+c)+(x+b+1)^2+(x+b+3)^2+\cdots+(x+c-1)^2=K\left(x+b,\frac{c-b}{2}\right)+M\left(x+b,\frac{c-b}{2}\right)=(x+b)\left(\frac{c-b}{2}+1\right)+\frac{c-b}{2}\cdot\left(\frac{c-b}{2}+1\right)+(x+b)^2\frac{c-b}{2}+(x+b)\frac{(c-b)^2}{2}+\frac{1}{6}((c-b)^3-(c-b)) == x^2\frac{c-b}{2}+x\frac{c^2-b^2+c-b+2}{2}+\frac{c^3-b^3}{6}+\frac{c^2-b^2}{4}+\frac{2b+c}{3}$

л.ч.=пр.ч. Умножим обе части на 2 и упростим:

$$x^2(c-b-a)+x(c^2-a^2-b^2+c-a-b)+\frac{c^3-a^3-b^3}{3}+\frac{c^2-a^2-b^2}{2} \\ +\frac{-2a+4b+2c}{3}=0$$

Рассмотрим частный случай.

Пусть $c=b+a$.

$$2abx+ab^2+a^2b+ab+2b=0$$

Разделим на b, так как случай b=0 не интересен: получим c=a и левая часть совпадёт с правой.

$$2ax+a^2+ab+a+2=0.$$

При $a=0$ уравнение примет вид 2=0 и не имеет решений. Значит $a\neq 0$. Тогда

$$x=-\frac{a^2+ab+a+2}{2a}=-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{a}$$

$\frac{a}{2}$ – целое, если b – нечётное, то $\frac{b}{2}+\frac{1}{2}$ – целое, $\frac{1}{a}$ – не является целым ни при каких чётных a. Таким образом, в этом случае нет ни одного целого x.

Если b –чётное, то $\frac{b}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{a}$ – целое только при $a=2$. Т.о. $a=2, c=b+2, x=-2-\frac{b}{2}$.

Пример a=2, b=6, c=8, $x=-2-\frac{6}{2}=-5$:

-5+(-4)^2+(-3)=1+2^2+3; 8=8.

Пункт 6в.

a – нечётное, c-b – нечётное

$$x+(x+1)^2+\cdots+(x+a-1)+(x+a)^2=(x+b)+\cdots+(x+c)^2$$

л.ч.= $x+(x+2)+(x+4)+\cdots+(x+a-1)+(x+1)^2+(x+3)^2+\cdots+(x+a)^2=K\left(x,\frac{a-1}{2}\right)+M\left(x,\frac{a+1}{2}\right)=x\cdot\frac{a+1}{2}+\frac{a-1}{2}\cdot\frac{a+1}{2}+x^2\frac{a+1}{2}+x\frac{(a+1)^2}{2}+$
$+\frac{1}{6}\left((a+1)^3-(a+1)\right)=x^2\frac{a+1}{2}+x\frac{a^2+3a+2}{2}+\frac{1}{12}(2a^3+9a^2+4a-3)$

пр.ч.= $(x+b)+(x+b+2)+\cdots+(x+c-1)+(x+b+1)^2+(x+b+$
$+3)^2+\cdots+(x+c)^2=K\left(x+b,\frac{c-b-1}{2}\right)+M\left(x+b,\frac{c-b+1}{2}\right)=(x+b)\frac{c-b+1}{2}+$
$+\frac{c-b-1}{2}\cdot\frac{c-b+1}{2}+(x+b)^2\frac{c-b+1}{2}+(x+b)\frac{(c-b+1)^2}{2}+\frac{1}{6}\big((c-b+1)^3-$
$-(c-b+1)\big)=x^2\frac{c-b+1}{2}+x\frac{c^2-b^2+3c-b+2}{2}+\frac{c^3-b^3}{6}+\frac{3c^2-b^2}{4}+\frac{2b+c}{3}-\frac{1}{4}$

л.ч.=пр.ч. Умножим обе части на 2 и упростим:

$$x^2(c-b-a)+x(c^2-a^2-b^2+3c-3a-b)+\frac{c^3-a^3-b^3}{3}+\frac{3c^2-3a^2-b^2}{2}+\frac{-2a+4b+2c}{3}=0$$

Рассмотрим частный случай.

Пусть c=b+a.

$$2b(a+1)x+b(a+1)(a+b+2)=0$$

При $b=0$ получим $c=a$ (этот случай не интересен).

a= –1 – не подходит по смыслу задачи.

Тогда

$$x=-\frac{a+b+2}{2}$$

Так как a – нечётное, то целое решение получим при любом нечётном b.

Пример: $a=4, b=3, c=8, x=-5$

$$-5+(-4)^2+(-3)+(-2)^2+(-1)+0^2=-2+(-1)^2+0+1^2+2+3^2$$

11=11

Пункт 6г.

a – нечётное, c-b – чётное

$$x+(x+1)^2+\cdots+(x+a-1)+(x+a)^2$$
$$=(x+b)+\cdots+(x+c-1)^2+(x+c)$$

л.ч.= $x+(x+2)+\cdots+(x+a-1)+(x+1)^2+(x+2)^2+\cdots+(x+a)^2 ==$ $K\left(x,\frac{a-1}{2}\right)+M\left(x,\frac{a+1}{2}\right)=x^2\frac{a+1}{2}+x\frac{a^2+3a+2}{2}+\frac{1}{12}(2a^3+9a^2+4a-3)$

пр.ч.=$(x+b)+(x+b+2)+\cdots+(x+c)+(x+b+1)^2+(x+b+3)^2+\cdots+$ $(x+c-1)^2=K\left(x+b,\frac{c-b}{2}\right)+M\left(x+b,\frac{c-b}{2}\right)=x^2\frac{c-b}{2}+x\frac{c^2-b^2+c-b+2}{2}+$ $+\frac{c^3-b^3}{6}+\frac{c^2-b^2}{4}+\frac{2b+c}{3}$

л.ч.=пр.ч. Умножим обе части на 2 и упростим:

$$x^2(c-a-b-1)+x(c^2-a^2-b^2+c-3a-b)+\frac{c^3-a^3-b^3}{3}$$
$$+\frac{c^2-3a^2-b^2}{2}+\frac{-2a+4b+2c}{3}+\frac{1}{2}=0$$

Рассмотрим частный случай.

Пусть $c=a+b+1$. Последнее уравнение примет вид

$$2(ab+b+1)x+a^2b+ab^2+3ab+b^2+2a+4b+2=0.$$

Так как $a>0$ по смыслу задачи и $a<b$ то $ab+b+1\neq 0$ и

$$x=-\frac{a^2b+ab^2+3ab+b^2+2a+4b+2}{2ab+2b+2}$$

Если снять ограничение $a<b\leq c$ и взять $b=0$, то получим $c=a+1$, $x=-a-1$

Пример: $a=7, b=0, c=8, x=-8$

$$-8+(-7)^2+(-6)+(-5)^2+(-4)+(-3)^2+(-2)+(-1)^2$$
$$=-8+(-7)^2+(-6)+(-5)^2+(-4)+(-3)^2+(-2)+(-1)^2+0$$

64=64

(Не очень интересный случай, так как слева и справа одинаковые слагаемые).

Пункт 7.

$$G(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = x^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = x^2$$

Таким образом, $x = \frac{n(n+1)}{2}$ или $x = -\frac{n(n+1)}{2}$ Это целые значения при любых n.

Пункт 8.

$$x^3 + (x+1)^3 + (x+n-1)^3 + \cdots + (x+n)^3 = (x+n+1)^3 + \cdots + (x+2n)^3$$

л.ч. = $G(x+n) - G(x-1) = \frac{(x+n)^2(x+n+1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2(x-1+1)^2}{4} = \frac{(x+n)^2(x+n+1)^2}{4} -$
$- \frac{(x-1)^2 x^2}{4}$

пр.ч.= = $G(x+2n) - G(x+n) = \frac{(x+2n)^2(x+2n+1)^2}{4} - \frac{(x+n)^2(x+n+1)^2}{4}$

л.ч. = пр.ч.

$$-x^3 + 3n^2x^2 + 3n^2(2n+1)x + \frac{1}{2}n^2(7n^2+6n+1) = 0$$

Целых x не удалось найти ни при каких натуральных n.

Пункт 9.

$$x^3 + (x+1)^3 + \cdots + (x+a)^3 = (x+b)^3 + \cdots + (x+c)^3$$

л.ч. = $G(x+a) - G(x+b-1) = \frac{(x+a+1)^2(x+a)^2}{4} - \frac{(x-1)^2x^2}{4}$

пр.ч.= = $G(x+c) - G(x+b-1) = \frac{(x+c)^2(x+c+1)^2}{4} - \frac{(x+b-1)^2(x+b)^2}{4}$

л.ч. = пр.ч.

$$(c-b-a)x^3 + x^2 \cdot \frac{3}{2}(c^2 - a^2 - b^2 + c - a + b) + x(c^3 - a^3 - b^3 + \frac{3}{2}(c^2 - a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(c-a-b) + \frac{c^4 - a^4 - b^4}{4} + \frac{c^3 - a^3 + b^3}{4} + \frac{c^2 - a^2 - b^2}{4} = 0$$

Пусть c=a+b.

$$3b(a+1)x^2+3b(a+1)(a+b)x+\frac{1}{2}b(a+1)(2a^2+3ab+2b^2+a)=0$$

b=0, a=-1 – не подходят.

$$6x^2+6(a+b)x+(2a^2+3ab+2b^2+a)=0$$

$$D=36(a+b)^2-24(2a^2+3ab+2b^2+a)=-12(a^2+b^2+2a)$$

Если $a>0$, то $D<0$, следовательно нет корней x.

Заключение

Поставленная VII-м Минском городском открытым турнире юных математиков задача «Увлекательные суммы» решена в полном объеме. Поставленные цели достигнуты. В процессе решения продемонстрированы различные приемы для нахождения сумм n слагаемых определенного вида. А именно, применение метода математической индукции, преобразование выражений, представление данной сумы в виде разности двух других сумм, для которых уже найдены значения и др.

Список использованных источников

1. [Электронныйресурс]://http://www.uni.bsu.by/arrangements/gtum57/index.html.– Дата доступа: 11.02.2020.